単位分数の和が１

西山豊

〒533-8533 大阪市東淀川区大隅2-2-8 大阪経済大学 経営情報学部

Tel: 06-6328-2431 E-Mail: nishiyama@osaka-ue.ac.jp

「数学を楽しむ／単位分数の和が１」『理系への数学』2010年11月，Vol.43，No.11，17-20に掲載

１．完全数をヒントに

分子が１の分数を単位分数という．１を異なる単位分数に分解することができる．たとえば，次式はよく見かける．

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

左辺と右辺に６をかけると

$$6=3+2+1$$

となり，この等式が正しいことがわかる．

ここで，１を異なる単位分数に分解する問題を考えてみよう．ただし，分母が２桁以下（99以下の自然数）という条件をつけてみる．その場合，最大何個の単位分数に分解することができるだろうか．こんな問題を考えたのは，1992年の頃だった[1]．

自然数mに対してmを除くすべての約数（１を含む）を求め，それらの総和が元の数mに等しいとき，mは完全数であるという．つまり，６は完全数である．６と同じように28も完全数であり，28の約数は14，7，4，2，1であるから，

$$28=14+7+4+2+1$$

両辺を28で割ると，

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}$$

となり，１が５個の単位分数に分解できたことになる．

完全数は６や28以外にも496，8128，33550336，8589869056等があり，同じような方法で，１を異なる単位分数に分解することができるが，分母が99以下である条件では，項数を増やすことが期待できない．496の場合は，9個で分母が最大３桁になる．

$$496=248+124+62+31+16+8+4+2+1$$

分母が99以下では，試行錯誤の末，最大42個の異なる単位分数に分解することができた．また，分解の仕方によっては異なる解が存在することもわかった．しかし，42個が最大であることの証明はできていない．もしかして43個が見つかるかもしれない．

今回は，どのような手順で42個の単位分数に分解できたかを説明したい．この問題は，自分で解く楽しさがあるので，読者はこの先を読まずに，一旦解いてみて，後で答えあわせをするとよいだろう．

２．二項分解と二項合成

まず，

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

の３個から始めてみよう．分数の表記は行数を取るので，$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}$などの単位分数は，分子の１を省略して$/2, /3, /6$などと表記することにすると，次のような記述となる．

$$1=/2+/3+/6 \qquad ①$$

そして，先頭の$/2$の項を分解していくと，つぎの 9 個まで分解できることになる.

$1=/2+/3+/6$

$=(/3+/6)+/3+/6$

$=(4/15+/15)+(/6)+/3+/6$

$=(4/15)+(/30+/30)+(/6)+/3+/6$

$=(/5+/15)+/30+(/45+/90)+(/9+/18)$

$\quad +/3+/6$

$=/3+/5+/6+/9+/15+/18+/30+/45+/90$ ②

ここで,

$/3=/4+/12$

$/6=/7+/42$

であるから，$/3$と$/6$を置き換えるとつぎの 11 個になる.

$$1=/4+/5+/7+/9+/12+/15+/18+/30$$
$$+/42+/45+/90 \qquad ③$$

分解や合成の仕方を整理すると５つの法則に分類することができる.

法則１：二項分解

単位分数$/n$が２つの異なる単位分数に分解できることを示しておこう．単位分数の分母nが$n=a\times b$と分解できたとする．ただし，a, bは１を含んでもよいこととする．すると，つぎの２つの単位分数に分解できる.

$$/n=/(a\times b)=(a+b)/((a\times b)\times(a+b))$$
$$=/(b\times(a+b))+/(a\times(a+b))$$
$$=/(a\times(a+b))+/(b\times(a+b))$$

たとえば，単位分数$/30$は$n=30$であり，$30=5\times 6$と分解できるから,

$n=30, a=5, b=6,$

$a+b=11,$

$a\times(a+b)=55, b\times(a+b)=66$

$/30=/55+/66$

となる．このような二項分解は，いくつでも作ることができる．前述の$/3, /6$はつぎのようになる.

$/3=/(1\times 3)=/(1\times(1+3))+/(3\times(1+3))$

$\quad =/4+/12$

$/6=/(1\times 6)=/(1\times(1+6))+/(6\times(1+6))$

$\quad =/7+/42$

このような二項分解はひとつずつ手計算で求めてもよいし，表計算ソフトを使ってすべてをリストアップしてもよい.

③式において，$/42, /7$はつぎのようになる.

$/42 = /(6\times 7) = /(6\times(6+7)) + /(7\times(6+7))$

$\quad = /78 + /91$

$/7 = /(1\times 7) = /(1\times(1+7)) + /(7\times(1+7))$

$\quad = /8 + /56$

以下，法則 1 を用いた二項分解はつぎのとおりである．

$/8 = /9 + /72$

$/10 = /14 + /35$

$/18 = /22 + /99$

$/24 = /33 + /88$

$/28 = /44 + /77$

$/30 = /55 + /66$

法則２：分母を n 倍して n 項分解

単位分数 $/a$ の分母 a を n 倍して，分母が $n\times a$ の単位分数 n 項に分解する．

$/a = /(n\times a) + /(n\times a) + \cdots + /(n\times a)$

$n=2$ または $n=3$ の場合は，つぎのようになる．

$/4 = /8 + /8$

$/5 = /10 + /10$

$/8 = /24 + /24 + /24$

$/9 = /18 + /18$

$/14 = /28 + /28$

$/15 = /30 + /30$

$/18 = /36 + /36$

$/35 = /70 + /70$

法則３：三項分解

$/n = /a + /b + /c$

であるが，これを見つけるのは一番難しい．計算方法は後述する．

$/9 = /14 + /35 + /90$

$/10 = /17 + /34 + /85$

$/12 = /26 + /39 + /52$

$/20 = /38 + /76 + /95$

法則４：二項分解の変形

基本の二項分解 $/a = /b + /c$ があるとき，それぞれの単位分数の分母を n 倍したものも二項分解となる．

$/a = /b + /c$

$/(n\times a) = /(n\times b) + /(n\times c)$

たとえば

$/4 = /5 + /20$

$/(2\times 4) = /(2\times 5) + /(2\times 20)$

$/8 = /10 + /40$

である．このような分解にはつぎがある．

$/10 = /12 + /60$
$/12 = /16 + /48$
$/14 = /21 + /42$
$/15 = /18 + /90$
$/16 = /20 + /80$
$/18 = /27 + /54$
$/24 = /32 + /96$
$/30 = /50 + /75$
$/36 = /63 + /84$

法則５：二項分解を逆に適用すれば二項合成

たとえば

$/15 = /18 + /90$

の二項分解があるとき，左右の両辺を入れ替えると二項合成になる．

$/18 + /90 = /15$

このような二項合成は，つぎのようなものがある．

$/28 + /70 = /20$
$/72 + /24 = /18$

３．三項分解の方法

前掲の法則３では，つぎのような分解が可能であることを示した．

$/12 = /26 + /39 + /52$

ここでは，単位分数$1/m$を三項に分解することを考えてみよう．それには，分母のmが最小公倍数となるような 3 つの数a, b, cを見つけることがキーポイントになる．そして，元の単位分数$1/m$の分子と分母に３つの数の合計$a+b+c$を掛ける．

$$\begin{aligned}1/m &= (a+b+c)/(m\times(a+b+c)) \\ &= a/(m\times(a+b+c)) + b/(m\times(a+b+c)) \\ &\quad + c/(m\times(a+b+c))\end{aligned}$$

ここで，a, b, cの最小公倍数がmであるから，mはa, b, cでそれぞれ割り切れる．つまり，$a/m, b/m, c/m$は単位分数になる．これらの分母に$(a+b+c)$を掛けたものも単位分数となる．

$1/12$を例にして三項分解を具体的に求めて見よう．最小公倍数が 12 となるような３つの数に 3, 4, 6 がある．３つの数の合計は$3+4+6=13$である．単位分数$1/12$の分子と分母に$(3+4+6)$を掛ける．

$$\begin{aligned}1/12 &= (3+4+6)/(12\times(3+4+6)) \\ &= 3/(12\times13) + 4/(12\times13) + 6/(12\times13) \\ &= 1/(4\times13) + 1/(3\times13) + 1/(2\times13) \\ &= 1/52 + 1/39 + 1/26 \\ &= 1/26 + 1/39 + 1/52\end{aligned}$$

一方，最小公倍数が 12 となる３つの数には，2，4，6 の組み合わせもある．この場合の３つの数の合計は$2+4+6=12$となり，前述と同様の計算をすると

$$
\begin{aligned}
1/12 &= (2+4+6)/(12\times(2+4+6)) \\
&= 2/(12\times 12) + 4/(12\times 12) + 6/(12\times 12) \\
&= 1/(6\times 12) + 1/(3\times 12) + 1/(2\times 12) \\
&= 1/72 + 1/36 + 1/24 \\
&= 1/24 + 1/36 + 1/72
\end{aligned}
$$

となる．

４．最大項数は 62

１を単位分数に分割する問題も，二項分解，二項合成，三項分解を繰り返す中で，いくつも項数を増やすことができて，暇つぶしにはもってこいだ．ところで，項の数は最大いくつまで増やすことができるのだろうか．積分で予測を立ててみると最大項数は 62 となった．それは以下のような手順で求まる．単位分数の総和を双曲線 $y = 1/x$ の積分と比較してみる．積分区間を $[1, n]$ とすると， x の区間幅は $n-1$ となり，区分求積法でいう長方形の数は $n-1$ 個に対応し，つぎの不等式が成り立つ．

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i} < \int_1^n \frac{dx}{x} < \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}$$

この不等式を図で示すと図１と図２になる．

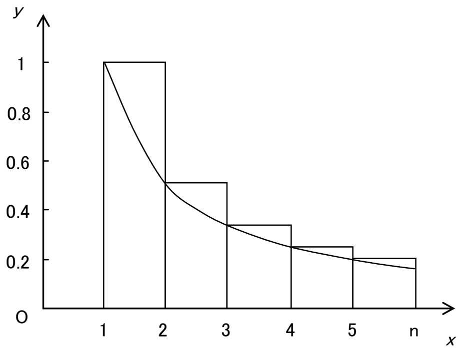

図１． $\int_1^n \frac{dx}{x} < \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}$

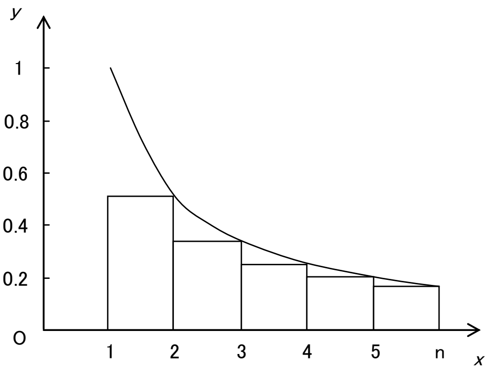

図２． $\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i} < \int_1^n \frac{dx}{x}$

前の不等式を変形すると

$$\int_1^n \frac{dx}{x} + \frac{1}{n} < \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} < \int_1^n \frac{dx}{x} + 1$$

になり，双曲線 $y=1/x$ の積分は $\log x$ であるから

$$\log n+\frac{1}{n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}<\log n+1$$

となる．

単位分数の分母が大きいほど項数を増やせるから，分母が99から始めて小さいほうに進むようにして，つまり $\sum_{i=n}^{99}\frac{1}{i}$ を考えて，この値が 1 を越えない場合の最大の n を求めてみる．最初の不等式において積分区間 $[1, n]$ を $[n, 99]$ に変更すると

$$\sum_{i=n+1}^{99}\frac{1}{i}<\int_{n}^{99}\frac{dx}{x}<\sum_{i=n}^{98}\frac{1}{i}$$

になり，この不等式を変形すると

$$\int_{n}^{99}\frac{dx}{x}+\frac{1}{99}<\sum_{i=n}^{99}\frac{1}{i}<\int_{n}^{99}\frac{dx}{x}+\frac{1}{n}$$

となり，定積分を求めると

$$\log 99-\log n+\frac{1}{99}<\sum_{i=n}^{99}\frac{1}{i}<\log 99-\log n+\frac{1}{n}$$

となる．ここで，単位分数の総和が 1 を超えないためには右側の不等式より，

$$\log 99-\log n+\frac{1}{n}<1$$

となる．この不等式で最大の n を求めると

$$n=38$$

となる．$1/38$ から $1/99$ までの単位分数の総和であるから，項の数は $99-38+1=62$ となる．62 が最大項数であるが，現在わかっている項数 42 は，$42<62$ であるから，ほぼ妥当な数値である．

５．樹形図

このようにして，1 を 42 個の異なる単位分数に分解することができた．

$$\begin{aligned}1=&/15+/17+/20+/21+/22+/26+/27+/30\\&+/32+/33+/34+/35+/36+/38+/39+/40\\&+/42+/44+/45+/48+/50+/52+/54+/55\\&+/56+/60+/63+/66+/70+/75+/76+/77\\&+/78+/80+/84+/85+/88+/90+/91+/95\\&+/96+/99 \qquad ④\end{aligned}$$

また，この解で

$$/15+/30+/90=/18+/24+/72$$

のように置き換えると，別の解となる．

$$
\begin{aligned}
1 = {}& /17 + /18 + /20 + /21 + /22 + /24 + /26 + /27 \\
&+ /32 + /33 + /34 + /35 + /36 + /38 + /39 + /40 \\
&+ /42 + /44 + /45 + /48 + /50 + /52 + /54 + /55 \\
&+ /56 + /60 + /63 + /66 + /70 + /72 + /75 + /76 \\
&+ /77 + /78 + /80 + /84 + /85 + /88 + /91 + /95 \\
&+ /96 + /99 \qquad\qquad ④'
\end{aligned}
$$

以上の結果④を樹形図として表すと図３のようになる．１を分解していくのであるから１が幹であり，幹から枝分かれしていく過程は二項分解，三項分解などに対応している．42 枚の葉っぱが 42 個の異なる単位分数になっている．このようにしてできあがった樹形図は個人的には気に入っているが，点線で示した，二項合成が 3 箇所ある．

$/90 + /18 = /15$

$/72 + /24 = /18$

$/28 + /70 = /20$

これらは生物学的に見て少し不自然である．分解過程を工夫すれば，このような二項合成を含まない分解方法があるかもしれない．

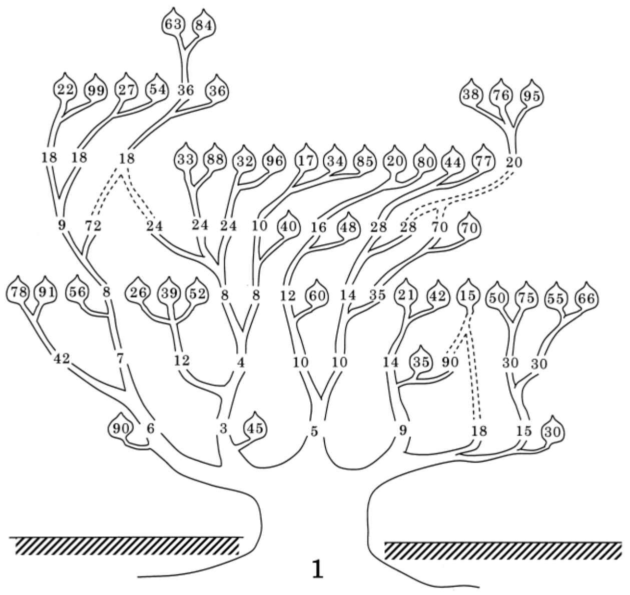

図３．単位分数による分割の樹形図

参考文献

[1] 西山豊「エレガントな解答をもとむ」『数学セミナー』1992 年 8 月（出題），11 月（解答）

（にしやま　ゆたか／大阪経済大学）